

OLASILIK VE İSTATİSTİK

BAZI KESİKLİ DAĞILIMLAR

Dağılımlar; rasgele değişkenin, tanım aralığındaki tavrını gösteren ifadelerdir. Rasgele değişkenlerin kesikli veya sürekli olması durumuna göre dağılımlar da kesikli yada sürekli olur.

Düzenli Dağılım

Bir deneyin sonucunda meydana gelen sonlu sayıdaki farklı durumun, eşit olasılığa sahip olduğunu düşünelim.

X rasgele değişkeni; alabileceği sonlu sayıdaki x_1, x_2, \dots, x_N değerlerini eşit olasılıklarla alıyorsa, bu rasgele değişkene düzenli kesikli rasgele değişken denir ve olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{N}, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_N$$

dir.

$$\text{Kesikli düzenli dağılımının ortalaması : } E(X) = \mu = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{Kesikli düzenli dağılımının varyansı : } \text{Var}(X) = \sigma^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

Örnek. Bir para 1 kez atılıyor. Turaların sayısının dağılımı nedir?

Çözüm.

$$X: \text{Turaların sayısı}, \quad x = 0, 1$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{2}, \quad x = 0, 1$$

Örnek. Bir önceki örnek için : $E(X)$ ve $\text{Var}(X)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{N^2-1}{12} = \frac{2^2-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Bernoulli Dağılımı

Bir paranın atılması, bir zarın atılması denemelerinde belli bir yüzün gelmesi yada gelmemesi ile ilgilenilir. Bir oyunun kazanılması veya kaybedilmesi, istenilen bir durumun oluşması veya oluşmaması gibi durumlarda genellikle başarılı yada başarısız olarak nitelendirilen iki sonuçla ilgilenilir. Böyle denemelere, Bernoulli denemeleri adı verilir.

Bir rasgele değişken için yalnız iki sonuç varsa, bu rasgele değişkene Bernoulli rasgele değişkeni denir.

Üzerinde durulan olayın gerçekleşme(başarı) olasılığı p , gerçekleşmeme (başarısızlık) olasılığı $q = 1 - p$ olarak nitelenirse, $p + q = 1$ dir. Buna göre, bir deneme için

$$P(X = 1) = p \text{ ve } P(X = 0) = q$$

demektir.

X Bernoulli değişkeni, başarı olasılığı $P(X = 1) = p$, başarısızlık olasılığı $P(X = 0) = q = 1 - p$ olmak üzere,

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

dağılımına Bernoulli dağılımı denir.

$$\text{Bernoulli dağılımının ortalaması : } E(X) = \mu = p$$

$$\text{Bernoulli dağılımının varyansı : } \text{Var}(X) = \sigma^2 = pq$$

$$\text{Bernoulli dağılımının Moment Çıkaran fonksiyonu : } M_X(t) = E[e^{tX}] = q + e^t p$$

$$\text{Bernoulli dağılımının Karakteristik Fonksiyonu : } \phi_X(t) = E[e^{itX}] = q + e^{it} p$$

Örnek. Ardışık üç Bernoulli denemesinde, üçünün de başarılı olma olasılığı 0.008 ise; üç denemenin üçünün de başarısız olma olasılığı nedir?

$$\text{Çözüm. } 0.008 = p.p.p = p^3 \Rightarrow p = 0.2$$

$$q = (1 - p) = 0.8 \text{ olup } q.q.q = q^3 = (0.8)^3 = 0.512$$

Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

Bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında (bağımsız olarak) n kez tekrarlanması ile oluşan deneye Binom deneyi denir.

Bir tek deneme için başarılı olma olasılığı p , başarısızlık olasılığı $q = 1 - p$ ise aşağıdaki şartları sağlayan X rasgele değişkenine Binom rasgele değişkeni denir.

- Her bir denemenin başarılı ve başarısız gibi iki sonucu vardır.
- Denemeler birbirinden bağımsızdır. (Çekim yapılıyorsa iadeldir)
- Denemelerin toplam sayısı n dir.

Böylece X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

biçimindedir. Bu dağılıma "Binom dağılımı" denir.

X rasgele değişkeni Binom dağılımına sahip olduğunda $X \sim B(n, p)$ ile gösterilir.

X , Binom dağılımına sahip rasgele değişken olsun.

Binom dağılımının ortalaması : $E(X) = \mu = np$

Binom dağılımının varyansı : $Var(X) = \sigma^2 = npq$

Binom dağılımının Moment Çıkarıcı fonksiyonu : $M_X(t) = E[e^{tX}] = (q + e^t p)^n$

Binom dağılımının Karakteristik Fonksiyonu : $\phi_X(t) = E[e^{itX}] = (q + e^{it} p)^n$

Örnek. Bir kutuda bulunan 10 tabletten 5 tanesi aspirindir. Yerine konularak kutudan 3 tablet çekildiğinde 2 tanesinin aspirin olması olasılığı nedir?

Çözüm. Çekilen tablet, aspirindir veya değildir. İki durum var. Bernoulli denemesidir.

İstenen durum(başarı), çekilen tabletin aspirin olmasıdır. $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$

Deneme üç defa tekrarlanıyor.(İadeli) $n = 3$

X : Çekilen tabletin aspirin olması

diye tanımlandığında, $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ dağılımına sahiptir.

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} & , x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & , \text{diğer } d. \end{cases}$$

İstenen olasılık

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 0.375$$

Soru. Her sorunun 4 yanlış 1 doğru cevabının olduğu bir test sınavında 20 soru soruluyor. X rasgele değişkeni “ doğru işaretlenen soru sayısı “ olarak tanımlandığına göre,

- Herhangi bir öğrencinin 50 alma olasılığını bulunuz.
- Beklenen doğru cevap sayısını bulunuz.
- Herhangi bir öğrencinin hiç doğru cevap verememe olasılığını bulunuz.